なわばりの形(基研短期研究計画「形の物理学」,研究会報告)

AUTHOR(S):

長谷川, 政美

CITATION:

長谷川, 政美. なわばりの形(基研短期研究計画「形の物理学」,研究会報告). 物性研究 1981, 36(1): A59-A64

ISSUE DATE:

1981-04-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/90230

11) Honda, H., Eguchi, G. (1980) J. Theor. Biol. **84** 575–588.

12) Honda, H., Ogita, Y., Higuchi, Y. 準備中.

13) Honda, H., Dan-Sohkawa, M., Watanabe, K. 準備中.

14) Honda, H., Kodama, R., Eguchi, G. (1980) 日本生物物理学会第18回年会.

なわばりの形

統計数理研究所　　長谷川　政　美

なわばりとは動物の個体が同種の他個体を排除して占有する空間である。なわばり性動物の生息地は，互いに重ならないたくさんのなわばりに分割されるが，このような空間分割のパターンは生息地の地形や，木，岩の配置など環境の不均一性の影響を強く受ける。気体分子運動論における理想気体の理論に対応するものとして，われわれは空間的に均一な理想的な環境のもとにおけるなわばりの形をモデル化した。[1,2,3,4]

個体の密度が高く，なわばりを持てないあぶれ個体が生ずる程であるとする。各なわばりの所有者は，侵入者を追い払うが，彼の強さはなわばりの中心から離れるにつれて単調に減少する。環境が均一であると共に，個体間に差がないと仮定すると，２次元生息地の場合には，隣り合った２個体のなわばりの境界は２つのなわばりの中心の間の垂直二等分線になると考えられる。多数の個体が限られた平面的生息地に入れられた場合，このような垂直二等分線によって仕切られる最小領域は多角形となる。この多角形は他のどの中心からよりもそれ自身の中心に近い点の集合であり，Voronoi 多角形と呼ばれるものである。

Meijering[5] は，結晶粒が溶融体の中でランダムに分布する結晶核から同時にあちこちで等方的に成長する状況を理論的に扱ったが，その結果できる結晶粒の形がまさにVoronoi 多面体であった。自然界でみられる Voronoi 多角形に似たパターンとしては次のようなものがある。

［１］ 細胞性粘菌 *Dictyostelium discoideum* が集合状態に入る時に見られるパターン[6]

［２］ Leduc の拡散実験でできる“人工組織”[7]

［３］ 生体組織中の細胞の形[8]

［４］ キクメイシなどのある種のサンゴに見られる模様（図１）

［５］ 森林における各樹木の勢力範囲（樹冠など）[3]（図２）

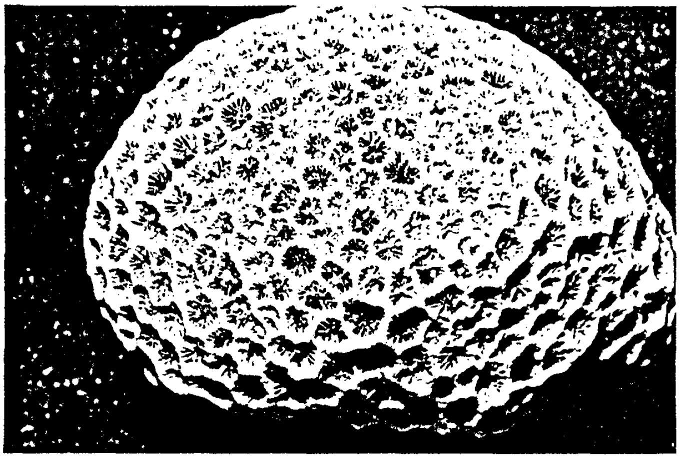

図1.　キクメイシにみられるVoronoi多角形様の模様

図2.　スギ人工林における樹冠パターン（千葉県天津小湊町・東京大学演習林。80年生）。

［6］　雪渓などで見られる融雪多角形[9)]

［7］　対流のBénard渦。熔岩が流れてひろがり，それが冷えて固まるときにできる割れ目のパターンは柱状節理（図3）として知られているが，これもBénard渦によるものであろう。

また，直接目で見えるパターンを呈するわけではないが，Voronoi多角形あるいは多面体の概念が現象を理解するのに役に立つ例として次のようなものがある。

［8］　群れをつくる草食動物個体にとっての危険領域[3, 10)]

［9］　作物と雑草との間の土地をめぐる競争[11)]

［10］　たんぱく質の立体構造の解析[12)]

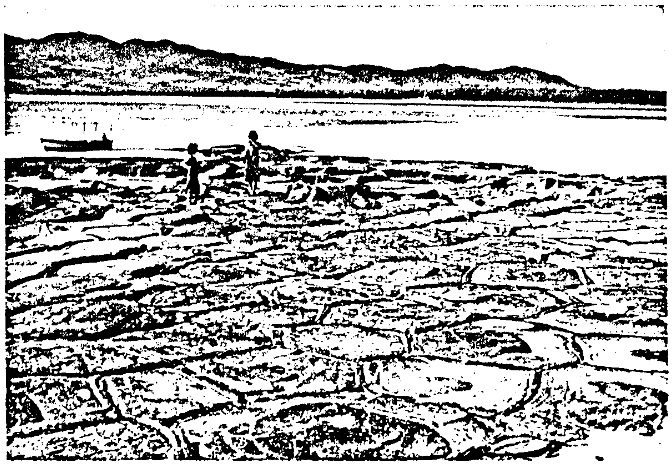

図3. 沖縄久米島の東隣り奥武島の畳石
柱状節理の一例である。

［11］ 結晶化過程における原子配置の解析[13)]

［12］ 都市の配置，マーケット，都市施設，特に公園，学校，警察などの圏域[14)]

さて，動物のなわばりの問題にもどろう。各個体を粒子と考え，N個の粒子が最初はランダムにばらまかれているとする。i番目の粒子の座標を$\boldsymbol{x}_i^{(0)}$とし，この点がi番目の個体の位置を示すと同時に，一時的ななわばりの中心であると考える。こうしてランダムに配置した各粒子に対して，一時的ななわばりであるVoronoi多角形$\Pi_i^{(0)}$（$i=1, 2, \cdots\cdots N$）が定まる。この時点では粒子の密度が密な場所と疎な場所とがあるであろう。例えば，図4のAで示した粒子のまわりはかなり密であり，個体Aはなわばりの境界のすぐ近くにいることになる。この

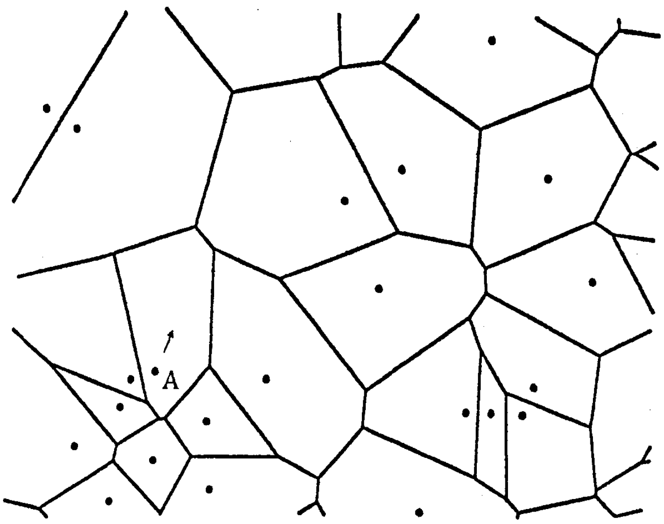

図4. ランダムな粒子配置に対するVoronoi多角形

位置はまわりの個体からの反発ポテンシャルを考えると不安定である。個体Aは隣りの個体から遠ざかり，なわばりの境界からなるべく離れようとして矢印の方向(重心の方向)に移動した方が，より安定な位置を占めることになるであろう。ここでは，この過程を通じて次のステップにおける個体 i の位置 $\boldsymbol{x}_i^{(1)}$ が次の式で与えられるものとする。

$$\boldsymbol{x}_i^{(1)} = \boldsymbol{x}_i^{(0)} + (\boldsymbol{g}_i^{(0)} - \boldsymbol{x}_i^{(0)})/M \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$$

ただし，ここで $\boldsymbol{g}_i^{(0)}$ は $\Pi_i^{(0)}$ の面積重心を表わし，M は1よりも大きな値をとり，これが大きい程動きがなめらかになる。実際の計算では主に $M = 20$ を採るが，結果は $M = 1$ としても余り変わらない。こうして，N 個体に対して新しい座標が定まり，これからこのステップにおける一時的ななわばりの境界として，新たなVoronoi 多角形 $\Pi_i^{(1)}$ が描かれる。このような手続きをくり返すと，次第に前のステップと変わりがなくなり，定常的なVoronoi 多角形が得られる。このような定常状態に達して初めて，中心点が固定し，そこに巣が作られるなどしてなわばりが確立するものと考える。最終的なパターンの例を図5に示す。このモデルでは，動物個体間

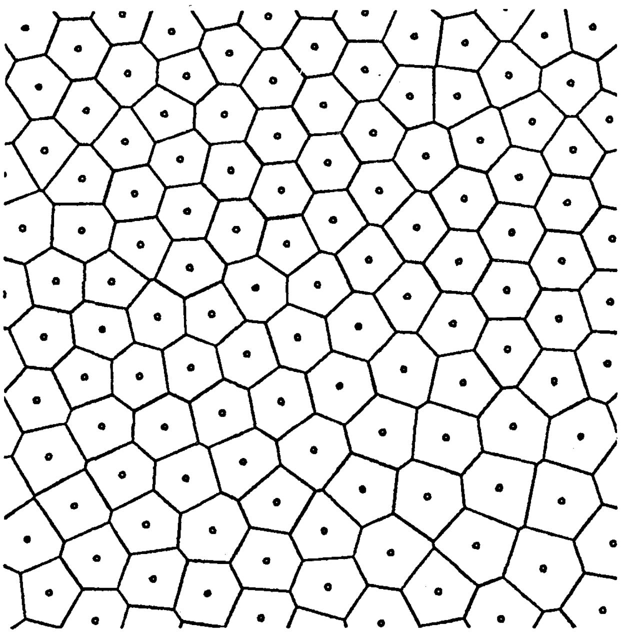

図5.　調節モデルによって得られる最終的ななわばりパターン[4)]

で互いになわばりの中心を調節し合いながら最終的ななわばりを形成してゆくと考えるので，“調節モデル”と呼ぶ。このような状況は，たくさんの個体が同時になわばりを獲得する場合に見られるであろう。

図5のようななわばりパターンは，実際にも見られるものである。Barlow[15)] は，口内哺育魚の一種 *Tilapia mossambica* を均一に砂をしいた池で飼った。繁殖期の雄は砂に浅い穴を掘って

巣にする。その際，隣りの雄に向って穴の中心から口にふくんだ砂を吐きかけるのである。こうして互いに砂を吐きかけ合う結果，なわばりの境界には砂の垣根ができ上がる。Barlowはこうしてなわばりによる平面分割のパターンを写真にとることができたが，それは図5と非常に良く似たものであった。[4)]

ここでは調節モデルの初期状態として粒子のランダム配置を採ったが，必らずしもランダムでなくてもゆらぎがあると，六角形だけからなるなわばりパターンから出発しない限りは，最終状態は図5に似たものになる。六角形から出発した場合には，最終状態は正六角形になる。規則的なパターンの中では，正六角形だけが安定であるということは，Bénard 渦が普通正六角形に近いということに関係あるかもしれない。[3)]

図1に示したキクメイシの模様もまた，図5のパターンと非常に良く似ている。キクメイシが生長するにつれて，各々のセルが大きくなろうとし，隣り合ったセル同士が押し合うことになる。調節モデルで想定したようなことが起こっているのであろう。

上で紹介した魚のなわばりは，人工的な池における実験によるものであり，自然条件下では図5のようななわばりパターンはなかなか見られない。これは，自然条件下では同時性の仮定が成り立たないことが多いためと考えられる。同時でない場合には，先に入った個体がなわばりを確立した後に新しい個体が入って来ることになり，調節モデルのようになわばりの中心を調整し合うということがないであろう。なわばりが確立して巣が作られてしまった後では，容易にその位置を移すことはできないはずである。その動物種にとっては隣接なわばりの中心間距離が $2r$ よりも近づくことはできないと仮定する。各個体は先着順に勝手な場所になわばりを作ってしまうとする。その際，なわばりの中心がまわりのすべての先住個体のなわばりの中心から $2r$ 以上の距離はなれていることだけが条件であり，こうして決まったなわばりの中心はその後からやって来る個体の影響で移動することはないと考える。ただし，なわばりの境界は， Voronoi 分割によるとするから，後から来た個体の影響で変化する。このようななわばり形成は，半径 r の円を有限領域にランダムに充塡する問題としてとらえることができる。これ以上入らなくなるまで円を充塡した後で円の中心点をもとにして Voronoi 多角形をかくと，これがわれわれのモデルにおけるなわばりの境界になる。ツンドラに営巣するアメリカウズラシギ*Calidris melanotos*は高密度になるとなわばりが多角形になる。また，集団営巣するアジサシ*Sterna m. maxima*では，隣りの番との境界に排泄物が堆積し多角形のパターンを呈する。これらはいずれもランダム充塡モデルによるものと良く一致する。

動物の生息地は均一とは限らないので，なわばりが正確に Voronoi 多角形になることはむしろめずらしいことかもしれないが，われわれのモデルは，現実の様々な動物の示すなわばりの

パターンを理解する際の基礎になるであろう。

参 考 文 献

1) Hasegawa, M. & Tanemura, M. (1976) Ann. Inst. Statist. Math. 28B, 509–519.
2) 長谷川政美，種村正美（1977）応用統計学 5, 47–61.
3) Hasegawa, M. & Tanemura, M. (1978) Proc. Internatl. Symp. on Mathematical Topics in Biology, Kyoto. pp. 39–48.
4) Tanemura, M. & Hasegawa, M. (1980) J. Theoret. Biol. **82**, 477–496.
5) Meijering, J. L. (1953) Philips Res. Rep. **8**, 270–290.
6) Newell, P. C. (1977) Endeavour, New Series, **1**, 63–68.
7) Thompson, D'Arcy W. (1959) *On Growth and Form,* Cambridge Univ. Press, pp. 500–503.
8) Honda, H. (1978) J. Theoret. Biol. **72**, 523–543.
9) 松岡春樹，伊藤文雄（1979）福井大学積雪研究室研究報告第４号，pp. 9－31.
10) Hamilton, W. D. (1971) J. Theoret. Biol. **31**, 295–311.
11) Fischer, R. A. & Miles, R. E. (1973) Math. Biosci. **18**, 335–350.
12) Finney, J. L. (1978) J. Mol. Biol. **119**, 415–441.
13) Tanemura, M., Hiwatari, Y., Matsuda, H., Ogawa, T., Ogita, N. & Ueda, A. (1977) Prog. Theoret. Phys. **58**, 1079–1095.
14) Plattner, S. (1975) Sci. Am. **232** (No. 5), 66–79.
15) Barlow, G. W. (1974) Anim. Behav. **22**, 876–878.

二次元石けん泡の統計的「形」の問題

統計数理研究所　　種 村 正 美

§1. 序

石けんの泡の問題というと，すぐに，石けん膜に関する有名な Plateau の問題[1)]や，あるいは二次元の泡を用いた Bragg-Nye の結晶格子模型[2)]を連想されるむきが多いかもしれない。し